Manfred Knaebel, Helmut Jäger,
Roland Mastel

Technische Schwingungslehre

6. Auflage

Teubner

Manfred Knaebel, Helmut Jäger, Roland Mastel

Technische Schwingungslehre

Manfred Knaebel, Helmut Jäger, Roland Mastel

Technische Schwingungslehre

6., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 247 Abbildungen, 72 Aufgaben
und 40 Beispielen

Teubner

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Prof. Dipl.-Math. Manfred Knaebel, 1927 in Göppingen geboren, 1947 bis 1952 Studium der Mathematik und Physik an der Technischen Hochschule Stuttgart, 1952 bis 1955 Statiker und Kommissionsführer im Brückenbau und Stahlfundamentbau der Gutehoffnungshütte, Werk Sterkrade, 1956 bis 1957 Berechnungs- und Versuchsingenieur im Fahrzeugbau in Heilbronn a.N., von 1957 bis 1990 Dozent für Technische Mechanik und Technische Schwingungslehre an der Staatlichen Ingenieurschule Esslingen, jetzt Fachhochschule Esslingen-Hochschule für Technik.

Prof. Dr.-Ing. Helmut Jäger, 1946 in Stuttgart geboren, 1966 bis 1972 Studium der Mathematik an den Universitäten Stuttgart und Hamburg, 1972 bis 1985 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut A für Mechanik der Universität Stuttgart. 1985 bis 1990 Berechnungsingenieur bei der Firma Daimler-Benz. Seit 1990 Professor an der Fachhochschule Esslingen-Hochschule für Technik mit den Fachgebieten Technische Mechanik, Strömungsmechanik, Regelungstechnik und Simulation.

Prof. Dr.-Ing. Roland Mastel, 1952 in Karlsruhe geboren. 1972 bis 1977 Studium des Maschinenbaus an der Universität Karlsruhe, 1977 bis 1982 Assistent am Institut für Technische Mechanik der Fakultät Maschinenbau Universität Karlsruhe, 1982 bis 1990 Berechnungsingenieur im Kernenergiebereich bei der Firma Siemens (ehemals KWU) in Erlangen. Seit 1990 Professor an der Fachhochschule Esslingen-Hochschule für Technik mit den Fachgebieten Technische Mechanik, Schwingungslehre und Finite-Elemente-Methode.

1. Auflage 1976
2. Auflage 1980
3. Auflage 1984
4. Auflage 1987
5. Auflage 1992
6., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage Februar 2006

Der B. G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.teubner.de

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 3-519-46074-2

Vorwort zur 6. Auflage

Das hier vorliegende Skriptum entspricht dem, was die Verfasser an der Fachhochschule Esslingen - Hochschule für Technik auf dem Gebiet der Technischen Schwingungslehre als Grundlagen anbieten.

Das Skriptum soll Studentinnen und Studenten vor allem des Maschinenbaus eine leicht verständliche Einführung in die Schwingungstechnik sein. Sie sollen lernen, ein mechanisches Schwingungssystem zu analysieren. Nach allgemeinen Ausführungen zum Entstehen und zur Einteilung von Schwingungen werden zunächst einfache Modelle, die aber wesentliche Eigenschaften der Konstruktion wie Nachgiebigkeit und Trägheit berücksichtigen, behandelt. Ausführlich und mit vielen Beispielen wird auf die schwingungstechnisch wichtigste Kenngröße „Eigenkreisfrequenz“ eingegangen. Der Zusammenhang mit den vielfältigen konstruktiven Parametern wird erläutert. Schrittweise werden die mechanischen und mathematischen Modelle ergänzt, um Dämpfungen zu quantifizieren und auch um mehrere Schwingungsfreiheitsgrade erfassen zu können. Schwingungsdifferentialgleichungen sind aufzustellen, zu interpretieren und zu lösen und die gefundenen Lösungen sind in ihrer physikalisch-technischen Bedeutung zu verstehen. Um dieses Ziel zu erreichen werden zahlreiche Beispiele mit ausführlichen Lösungen erläutert. Die Aufgaben, für die im Anhang Lösungswerte angegeben sind, sollen zu selbstständiger Arbeit anregen. Bei Beispielen und Aufgaben handelt es sich zum überwiegenden Teil um Prüfungsaufgaben, die die Verfasser an der Fachhochschule in den vergangenen Jahren gestellt haben.

Die für das Verständnis erforderlichen mathematischen Kenntnisse werden heute allen Studierenden an einer Fachhochschule vermittelt. Die Formelzeichen werden nach DIN 1311 (Februar 2000) gewählt.

Die 6. Auflage ist sowohl in Form und Gestalt als auch inhaltlich vollständig überarbeitet und auch sprachlich auf den neuesten Stand gebracht worden. Dabei ist aber besonders darauf geachtet worden, dass sowohl der „Reiz“ des Büchleins – seine praxisnahen Beispiele – als auch seine gute Didaktik – vom Einfachen durch stetige Ergänzungen zum Schwierigen – erhalten bleibt. Uns bekannte Unstimmigkeiten haben wir korrigiert.

Dem Teubner-Verlag möchten wir für die gute Zusammenarbeit unseren herzlichen Dank sagen.

Stuttgart und Rechberghausen, im Sommer 2005, Helmut Jäger und Roland Mastel

Inhalt

1 Grundsätzliches mit einführenden Beispielen

In allen Bereichen der Technik, insbesondere in den klassischen Disziplinen Maschinenbau und Bauingenieurwesen, ist die sichere Auslegung von schwingenden Bauteilen von großer Bedeutung. Der Zwang zu schlanker und festigkeitsoptimierter Bauweise macht die Konstruktionen schwingungsempfindlicher. Für Ingenieure in der Entwicklung und Konstruktion sind Kenntnisse einer anwendungsorientierten Schwingungslehre grundlegend. Neben einfachen Modellen der Mechanik wie Punktmasse, Starrkörper oder elastischer Körper sind insbesondere jene Methoden wichtig, die auch quantitative Aussagen über das Schwingungsverhalten und die dabei auftretenden Belastungen und Beanspruchungen erlauben.

Unter einer Schwingung versteht man in der Mechanik meist einen sich in gleicher Weise wiederholenden Bewegungsvorgang, bei dem eine Zustandsgröße (wie z.B. der Weg oder die Winkelauslenkung) abwechselnd zu- und abnimmt.

Ein Schwingungssystem ist darüber hinaus noch durch Systemparameter gekennzeichnet, die im Falle mechanischer Systeme als Masse die Wirkung der Trägheit, als Feder die Wirkung der Rückstellung und als Dämpfer die Wirkung der Dämpfung charakterisieren.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf solche mechanische Schwingungen fester Körper. Das Hauptgewicht bilden einfache diskrete Modelle (Starrkörper, masselose Federn und Dämpfer), beschreibbar mit gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit für die Bewegungsfreiheitsgrade der Auslenkungen und Drehungen. Im Vordergrund stehen praktische schwingungstechnische Aussagen und Folgerungen für die in der Regel linearen, zeitinvarianten Systeme. Nur kurz dargestellt werden kontinuierliche Modelle mit verteilter Masse und Steifigkeit für sehr einfache schlanke Bauteile. Schwingungen von Fluiden werden nicht behandelt.

Die wichtigsten mechanischen Grundprinzipien wie das Grundgesetz nach Newton, auch in der d'alembertschen Fassung, Arbeits- und Energiesatz für die obigen mechanischen Modelle werden als bekannt vorausgesetzt und bei Bedarf benutzt.

1.1 Beispiele für Schwingungsvorgänge

Schwingungen treten in fast jedem Gebiet des Ingenieurwesens auf. Erste anschauliche Beispiele kommen aus der Fahrzeugtechnik. So gibt es für die Bewegungen eines Kraftfahrzeuges, als „Ganzes“ betrachtet, eigene Bezeichnungen.

Wiederkehrende Bewegungen in vertikaler Richtung werden Hubschwingungen genannt, jene in Längsrichtung heißen Ruckelschwingungen und die in Querrichtung nur einfach Querschwingungen. Drehbewegungen um die vertikale Hochachse führen auf Gierschwingungen, jene um die Längsachse zu Wankschwingungen und schließlich jene um die Querachse zu Nickschwingungen. Achsen, Räder, einzelne Teile der Radaufhängung können in Schwingung geraten. Gefährlich können Flatterschwingungen der gelenkten Räder werden. Motor und Getriebe sind an der Karosserie meist federnd gelagert, haben die oben für den Wagenaufbau als Ganzes beschriebenen Bewegungsfreiheitsgrade und können die entsprechenden Schwingungen ausführen. Karosseriebleche dröhnen, die Membran- und Biegeschwingungen der dünnen, elastischen Bauteile mit verteilter Masse und Steifigkeit (Kontinuum) übertragen sich auf die Luft. Torsions- und Biegeschwingungen des Antriebsstranges können Kurbelwelle oder Nockenwelle oder Achsen gefährden. Ventile können flattern, Bremsen quietschen. Die erwähnten Schwingungen sind möglichst zu vermeiden, oder wenigstens möglichst klein zu halten.

In der Schwingungstechnik gibt es auch Anwendungsfälle, bei denen Schwingungen technisch genutzt werden. Schwingförderer, Betonrüttler, Schwingsiebe, Rüttelwalzen sind einige Beispiele. In der klassischen Uhrentechnik werden die Schwingungen durch das Uhren-Pendel oder die „Unruhe" bestimmt. Heutzutage wird dafür die Piezotechnik eingesetzt. Im Zusammenhang mit Erdbeben kommen Schwingungstilger an Brücken und Hochbauten zum Einsatz.

1.2 Einteilung von Schwingungen und Grundbegriffe

Schwingungsvorgänge können nach verschiedenen Gesichtspunkten eingeteilt werden, je nachdem, welches Merkmal zur Unterscheidung verwendet wird.

Merkmal: Zeitlicher Verlauf

Bei den hier behandelten Schwingungen handelt es sich um deterministische Vorgänge. Zufallsschwingungen werden nicht behandelt. Dominierend sind periodische Schwingungen, deren harmonische Schwingungsanteile meist die Grundlage der Beurteilung bilden. Sonderfälle wie modulierte Schwingungen, transiente bzw. allgemein nicht periodische Bewegungen werden nicht oder nur kurz behandelt.

Merkmal: Entstehung der Schwingung

Man unterscheidet „autonome" und „heteronome" Schwingungen.

Bei einer *autonomen* Schwingung sind die Frequenzen ausschließlich vom Schwingungssystem selbst bestimmt.

Freie Schwingungen, auch als Überlagerung von *Eigenschwingungen*, sind eine Untergruppe. Sie entstehen, wenn ein schwingungsfähiges System ausgelenkt wird und dann sich selbst überlassen bleibt, wenn also keine weitere Energie zugeführt wird. Die dann ablaufende freie Bewegung ist eine Eigenschaft des Systems. Bild 1.1 zeigt als Beispiel ein Fadenpendel, das aus seiner statischen Gleichgewichtslage ausgelenkt und dann losgelassen wird. Natürlich sind auch Stöße am Anfang anstelle von Auslenkungen möglich, also Anfangsgeschwindigkeiten anstelle von Anfangsauslenkungen oder beides gleichzeitig.

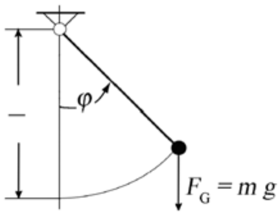

Bild 1.1
Fadenpendel

Eine *selbsterregte* Schwingung ist ebenfalls eine autonome Schwingung. Dem Schwinger wird im Takt der Schwingung laufend Energie zugeführt. Uhr und Klingel sind hierfür Beispiele aus dem Alltag.

Bei einer *heteronomen* Schwingung sind die auftretenden Frequenzen auch durch äußere Einwirkungen auf das System bestimmt.

Erzwungene Schwingungen bilden die wichtigste Untergruppe. Einem System werden durch z.B. periodische Kräfte oder Momente Schwingungsbewegungen aufgezwungen.

Parametererregte Schwingungen sind eine weitere Untergruppe der heteronomen Schwingungen. Eine Systemkenngröße (z.B. die Rückstellung) wird z.B. periodisch verändert. Beim Beispiel der Schaukel verändert der Schaukelnde den Abstand des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt durch seine relative Wippbewegung.

Merkmal: Dämpfung

Bei der ungedämpften Eigenschwingung bleibt die Schwingweite bzw. die Amplitude gleich, wohingegen bei gedämpfter Eigenschwingung die Schwingweite kleiner wird. Schließlich werden bei einer angefachten Schwingung (mit negativer Dämpfung) die Schwingweiten immer größer (oszillatorische Instabilität).

Merkmal: Zahl der Bewegungsfreiheitsgrade (bei diskreten Systemen)

Diese Zahl ist gleich der Anzahl der notwendigen, voneinander kinematisch unabhängigen Koordinaten, um die Lage bzw. die Anordnung eines Systems eindeutig anzugeben.

Bei *Systemen mit einem Freiheitsgrad* ist zur Festlegung des Auslenkungszustandes nur eine Lagekoordinate erforderlich. Es gibt nur eine Eigenschwingungsform. Ein Beispiel ist das Fadenpendel nach Bild 1.1. Als Lagekoordinate wird der Auslenkungswinkel festgelegt. Beim Modell einer masselosen, aber elastischen Welle mit einer Einzelmasse nach Bild 1.2 entspricht die Lagekoordinate der Durchbiegung der Welle am Ort des Massenpunktes.

Bei *Systemen mit mehreren Freiheitsgraden* sind zur Festlegung des Auslenkungszustandes mehrere Lagekoordinaten erforderlich. Die Bilder 1.3 und 1.4 zeigen einige Beispiele. Das Systemmodell der elastischen, aber masselosen Welle mit zwei Einzelmassen (Bild 1.3) hat zwei Freiheitsgrade, falls nur die kleinen Querbewegungen in der Ebene betrachtet werden. Die Schwingerkette mit drei geführten Einzelmassen hat drei Freiheitsgrade. Das Doppelpendel und die mit Federn gekoppelten Pendel haben jeweils zwei Freiheitsgrade.

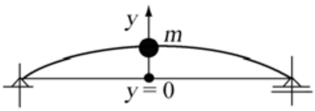

Bild 1.2 Biegeschwinger mit einem Freiheitsgrad

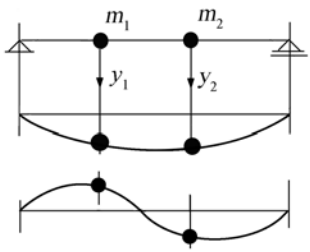

Bild 1.3 System mit zwei Freiheitsgraden – Erste und zweite Eigenschwingungsform

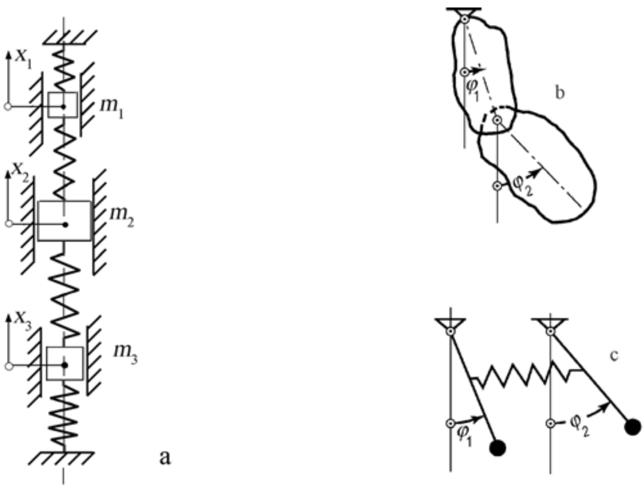

Bild 1.4 Systeme mit mehreren Freiheitsgraden
a drei Freiheitsgraden: Schwingerkette
b, c zwei Freiheitsgraden: Doppelpendel bzw. Pendel mit Federkopplung

Merkmal: Bewegungsform

Im Hinblick auf das oft benutzte Balkenmodell für schlanke Bauteile ist die Unterscheidung von Schwingbewegungen in Balkenlängsrichtung als *Längs*- oder *Longitudinalschwingung*, in Querrichtung als *Quer- oder Transversalschwingung* und bei Verwindung als *Verdreh*- oder *Torsionsschwingung* vorteilhaft, insbesondere bei entkoppelter Betrachtung.

Merkmal: Schwingungsdifferentialgleichung

Beim *linearen Schwinger* treten in den Bewegungsdifferentialgleichungen nur lineare Glieder auf, so z.B. eine Dehnfeder mit linearer Kennlinie. Es gibt keine Multiplikationen der Bewegungsgrößen. Es gibt dann invariante Systemkenngrößen (z.B. die Eigenkreisfrequenzen). Eine weitere wichtige Eigenschaft linearer Systeme ist die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes: Die Antwort auf eine Summe von Einzelerregungen ist gleich der Summe der Einzelantworten.

Bei *nichtlinearen Schwingern* treten in den Bewegungsdifferentialgleichungen auch nichtlineare Glieder (Produkte von Bewegungsgrößen) auf, so z.B. eine Dehnfeder mit progressiver Kennlinie. Die Phänomene nichtlinearer Schwingungen sind vielfältig. Es gibt keine Invarianten mehr. So ist z.B. die „Eigenkreisfrequenz" von den Anfangsbedingungen, d.h. von den sich einstellenden Schwingweiten abhängig. Nichtlineare Schwinger werden hier nur vereinzelt behandelt. Sehr häufig führen Linearisierungen zu befriedigenden Aussagen.

1.3 Periodische Funktionen

Zur analytischen Beschreibung von Schwingungsvorgängen werden Zustandgrößen eingeführt, etwa – wie bei den Systemen der Bilder 1.1 bis 1.4 – Längen- oder Winkelkoordinaten. Das Schwingungsverhalten lässt sich dann durch die Eigenschaften der Zeitfunktionen charakterisieren, nach denen sich solche Zustandgrößen ändern. Häufig spielen periodische Funktionen eine große Rolle. Eine Funktion $f(t)$ ist periodisch, wenn

$$f(t) = f(t+T) \tag{1.1}$$

gilt. Darin ist T die *Periode*, auch *Periodendauer* oder *Schwingungsdauer* genannt. Aus (1.1) folgt, dass auch

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = ... = f(t+nT), \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

gilt. Die bekanntesten periodischen Funktionen sind die Sinus- und die Kosinusfunktion

$$\sin\varphi = \sin(\varphi + n\,2\pi), \quad \cos\varphi = \cos(\varphi + n\,2\pi), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Zur Beschreibung von Bewegungsvorgängen sind sie mit linearer Zeitabhängigkeit $\varphi(t) = \omega t$ oder $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ von elementarer Bedeutung. Sie werden als *harmonische Zeitfunktionen* bezeichnet und ausführlich in Kap. 2.1 behandelt.

Allgemeinere periodische Funktionen können unterschiedlichste Verläufe haben (Bild 1.4).

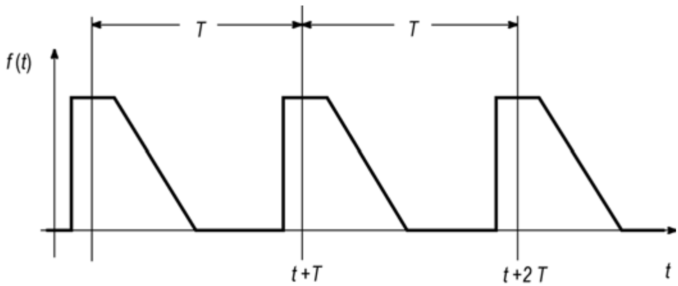

Bild 1.4 Beispiel einer periodischen Funktion

Anmerkung: Entsprechend zu (1.1) gilt auch für die Ableitungen

$$\dot{f}(t) = \dot{f}(t+T), \quad \ddot{f}(t) = \ddot{f}(t+T), \ldots,$$

sofern die Funktion an der Stelle t differenzierbar ist.

2 Harmonische Bewegung und Fourier-Analyse periodischer Schwingungen

2.1 Darstellung und Eigenschaften harmonischer Schwingungen

Wegen der elementaren Bedeutung der harmonischen Funktionen werden sowohl diese als auch deren Überlagerungen genauer betrachtet.

Durch Parallelprojektion der gleichförmigen Kreisbewegung eines Punktes $\bar{P}$ auf eine Gerade senkrecht zur Projektionsrichtung entsteht eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung des Punktes P, die man harmonische Bewegung nennt (Bild 2.1).

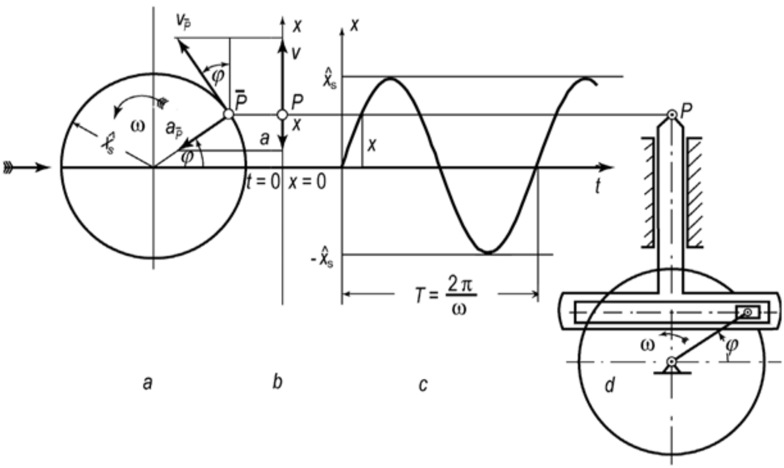

Bild 2.1 Erzeugung der harmonischen Bewegung

- a Gleichförmige Kreisbewegung des Punktes $\bar{P}$
- b Harmonische Bewegung des Punktes P auf der x-Achse
- c x, t-Diagramm der Bewegung des Punktes P
- d Mechanische Erzeugung der harmonischen Bewegung durch ein Kreuzschleifengetriebe

Aus Bild 2.1a liest man für die Auslenkung des Punktes P unmittelbar

$$x = \hat{x}_s \sin \varphi \tag{2.1}$$