

Benjamin Auer
Franz Seitz

Grundkurs Wirtschaftsmathematik

Prüfungsrelevantes Wissen –
Praxisnahe Aufgaben –
Komplette Lösungswege

3. Auflage



LEHRBUCH

Benjamin Auer / Franz Seitz

Grundkurs Wirtschaftsmathematik

Benjamin Auer
Franz Seitz

Grundkurs Wirtschaftsmathematik

Prüfungsrelevantes Wissen –
Praxisnahe Aufgaben –
Komplette Lösungswege

3. Auflage



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Dr. Franz Seitz ist Professor für Volkswirtschaftslehre, insbesondere Geldpolitik und Finanzmärkte, sowie Wirtschaftsmathematik an der Hochschule für angewandte Wissenschaften Amberg-Weiden.

Dipl.-Betriebsw. (FH) Benjamin Auer ist Doktorand an der wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Leipzig sowie Buchautor in den Bereichen Mathematik, Statistik und Buchführung.

1. Auflage 2006
2. Auflage 2010
3. Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten
© Gabler Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Irene Buttkus

Gabler Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.
Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.gabler.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkellOpka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Ten Brink, Meppel
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier
Printed in the Netherlands

ISBN 978-3-8349-2932-7

Vorwort

Vorwort zur 3. Auflage

Liebe Leserinnen und Leser,

wir freuen uns, Ihnen hiermit die 3. Auflage von „Grundkurs Wirtschaftsmathematik“ präsentieren zu dürfen. Aufgrund zahlreicher Rückmeldungen aus der Leserschaft, in denen betont wird, dass die einfache und verständliche Darstellung des Themengebietes der Wirtschaftsmathematik und die vielen Beispiele und Übungsaufgaben mit kompletten Lösungen (im Buch und im Online-Service) wesentliche Stärken des Buches darstellen, haben wir bei der Neuauflage die Grundkonzeption beibehalten und uns im Wesentlichen auf eine Korrektur der Fehler und kleine Ergänzungen inhaltlicher Art beschränkt.

Wir wünschen Ihnen weiterhin viel Erfolg bei der Arbeit mit dem Lehrbuch und den Online unter www.wima-auer-seitz.de zur Verfügung stehenden Materialien und danken an dieser Stelle Dipl.-Wirtsch.-Math. Martin Schuster und Steffen Burkhardt für ein abschließendes Korrekturlesen und -rechnen sowie wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge.

Weiden i. d. OPf. und Leipzig,
Juli 2011


Prof. Dr. Franz Seitz
Dipl.-Betriebsw. (FH) Benjamin R. Auer

Vorwort zur 2. Auflage

Liebe Leserinnen und Leser,

mit dieser 2. Auflage erscheint „Grundkurs Wirtschaftsmathematik“ in vollständig neuer Optik und inhaltlich komplett überarbeitet. Konkrete Rechenbeispiele wurden in leserfreundlicher Form vom theoretischen Text abgehoben und Gleichungen zur besseren Referenz nummeriert. Die Fehler, die sich in die 1. Auflage eingeschlichen hatten, wurden korrigiert und die Inhalte um weitere Themenbereiche erweitert. So werden nun z. B. auch Abschreibungen, das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung, die Regel von l' Hospital, numerische Integrationsverfahren, elementare Differenzialgleichungen, Matrixgleichungen und die lineare Optimierung thematisiert.

Auch der Online-Service zum Buch unter www.wima-auer-seitz.de wurde überarbeitet und erweitert. Wie bisher finden sich dort die Grafiken des Buches zum Einsatz in der Vorlesung, eine auf das Buch abgestimmte Formelsammlung und zahlreiche Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen. Darüber hinaus bieten wir nun auch eine Vielzahl von MS-Excel-Tools, mit denen Rechenbeispiele und Verfahren einfach nachvollzogen und praktisch umgesetzt werden können. Sie sind in

der Praxis insbesondere für finanzmathematische Fragestellungen, numerische Verfahren und das Lösen von Gleichungssystemen relevant. Immer dann, wenn zu einem Thema oder Beispiel ein entsprechendes Tool im Online-Service zur Verfügung steht, wurde dies durch das Symbol  am Seitenrand kenntlich gemacht. *Benutzernamen und Passwort* für den Zugang zum Online-Service können Sie über das Kontaktmenu auf www.wima-auer-seitz.de anfordern.

Wir wünschen an dieser Stelle allen Leserinnen und Lesern viel Erfolg bei der Arbeit mit dem Lehrbuch und den neuen Materialien. Wir danken Gisela Becker, Prof. Dr. Hans Benker, Prof. Dr. Martin Biewen, Prof. Dr. Frank Brand, Prof. Dr. Claudia Cottin, Prof. Dr. Regina Fischer, Prof. Dr. Gert-Harald Fröhlich, Prof. Dr. Andreas Gadatsch, Dr. Andreas Hilpert, Björn Jensen, Anastasia Luja, Prof. Dr. Volker Nollau, Stefan Riebl, Prof. Dr. Albert Ruff, Prof. Dr. Ulrich Sax, Prof. Dr. Rainer Schwabe, Prof. Stephan Dempe, Prof. Dr. Jürgen Strobel und Prof. Dr. Rudolf Voller für wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge. Besonderer Dank gilt Herrn Steffen Burkhardt für ein abschließendes Korrekturlesen.

Weiden i. d. OPf. und Leipzig,
August 2009

Prof. Dr. Franz Seitz
Dipl.-Betriebsw. (FH) Benjamin R. Auer

Vorwort zur 1. Auflage

Liebe Leserinnen und Leser,

mit diesem Buch liegt Ihnen ein Werk vor, das Ihnen die wesentlichen Themenbereiche der Wirtschaftsmathematik verständlich, anschaulich und doch knapp näherbringen soll. Vergessen Sie Mathematikbücher, bei denen Sie bereits nach den ersten Seiten an sich zu zweifeln beginnen, da Sie kein Wort verstehen.

Dieses wirtschaftsmathematische Grundlagenbuch soll Ihnen als Lehrendem helfen, das heikle Thema Mathematik verständlich und studentengerecht für Ihren Unterricht aufzubereiten. Ihnen als Studierenden soll es dazu dienen, alle relevanten Themen für Ihre Klausur noch einmal zu wiederholen und mit Hilfe zahlreicher Übungsaufgaben zu festigen. Bei der Lösung dieser Aufgaben werden Sie nicht alleine gelassen. Anders als in anderen Lehrbüchern wird Ihnen nicht einfach ein Ergebnis ohne Rechenweg und Erläuterung präsentiert. Stattdessen wird nachvollziehbar und anschaulich jeder einzelne Rechenschritt und die allgemeine Vorgehensweise erklärt.

Bei der Darstellung der Themenbereiche achten wir besonders auf Klarheit. Auf komplizierte Herleitungen und Beweise verzichteten wir bewusst, wo Sie unseres Erachtens nur das Verständnis behindern und für Sie nur von nachgeordneter Bedeutung sind. Es werden die traditionellen Bereiche Analysis, lineare Algebra und Finanzmathematik besprochen. Das Buch unterscheidet sich allerdings von anderen einschlägigen Lehrbüchern in der speziellen Darstellungsweise und Schwerpunktbildung. So wird im Kapitel zur linearen Algebra ausdrücklich auf die besondere Rolle der Determinanten zur Lösung einer Vielzahl von Problemstellungen hingewiesen. Des Weiteren bietet dieses Werk ein eigenes Kapitel zu den in der Praxis

bedeutenden Wachstumsraten und deren unterschiedliche Berechnungsweisen, die Sie nahezu in keinem anderen Lehrbuch finden. Und schließlich nimmt auch die Behandlung von Elastizitäten eine herausgehobene Stellung ein.

Was dieses Buch besonders auszeichnet, ist die Tatsache, dass es als Co-Produktion von Professor und Student entstanden ist. So ist zum einen die sachliche Richtigkeit und zum anderen auch die studentengerechte Darstellung der Themen gewährleistet. Didaktik und anwendungsorientierte Wissenschaft konnten dadurch auf anschauliche Weise kombiniert werden.

Zur Unterstützung von Lehrenden und Lernenden wurde eigens die Internetseite www.wima-auer-seitz.de eingerichtet. Hier finden Sie als Dozent alle Grafiken des Buches und weiteres Material zum Einsatz in der Vorlesung. Als Student bieten wir Ihnen zusätzliche Übungsaufgaben inklusive der ausführlichen Lösungen und eine auf das Buch abgestimmte Formelsammlung.

Allen Lesern wünschen wir auf diesem Weg, dass sie zum einen durch dieses Buch Ihre Klausuren erfolgreich meistern und außerdem einen Zugang zu den interessanten Fragestellungen finden, die sich mit Hilfe der Mathematik lösen lassen. Bei Fragen, Anregungen und Kritik würden wir uns über eine kurze E-Mail via www.wima-auer-seitz.de sehr freuen.

Weiden i. d. OPf., November 2005

Prof. Dr. Franz Seitz
Benjamin R. Auer

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Inhaltsverzeichnis.....	IX
Abbildungsverzeichnis.....	XV
Symbolverzeichnis	XIX
I Allgemeine Grundlagen.....	1
1. Aussagenlogik	3
1.1 Einführung.....	3
1.2 Logische Verknüpfungen.....	4
1.3 Logische Folgerungen.....	5
2. Mengenlehre	9
2.1 Grundlegendes	9
2.2 Mengenoperationen	11
2.3 Mengenalgebra	13
3. Grundlagen der Arithmetik.....	15
3.1 Grundregeln des Rechnens.....	15
3.1.1 Grundgesetze	15
3.1.2 Vorzeichenregeln	17
3.1.3 Binomische Formeln	18
3.1.4 Bruchrechnung.....	19
3.1.5 Umformung linearer Gleichungen.....	23
3.2 Summen-, Produkt- und Fakultätszeichen	26
3.2.1 Summenzeichen	26
3.2.2 Produktzeichen.....	30
3.2.3 Fakultätszeichen und Binomialkoeffizienten.....	31
3.3 Ungleichungen und Absolutbeträge.....	33
3.3.1 Ungleichungen	33
3.3.2 Absolutbeträge.....	36
3.4 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.....	38
3.4.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten	38
3.4.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	41
3.4.3 Potenzen mit gebrochenen Exponenten (Wurzeln).....	42
3.4.4 Logarithmen.....	45

3.5 Weitere Gleichungstypen	47
3.5.1 Weitere äquivalente Umformungen	47
3.5.2 Quadratische Gleichungen	49
3.5.3 Wurzelgleichungen	51
3.5.4 Logarithmusgleichungen.....	52
3.5.5 Produkt- und Quotientengleichungen	54
4. Aufgaben.....	55
II Finanzmathematik	61
1. Folgen und Reihen	63
1.1 Folgen	63
1.1.1 Grundlagen	63
1.1.2 Arithmetische Folgen.....	64
1.1.3 Geometrische Folgen.....	65
1.2 Reihen	66
1.2.1 Grundlagen	66
1.2.2 Arithmetische Reihen.....	66
1.2.3 Geometrische Reihen.....	67
1.3 Einige spezielle Reihen.....	68
1.3.1 Unendliche geometrische Reihe.....	68
1.3.2 Die Euler'sche Zahl e	68
2. Finanzmathematische Anwendung	69
2.1 Allgemeines.....	69
2.2 Zinsen.....	70
2.2.1 Einfache Verzinsung	70
2.2.2 Zinseszins.....	73
2.2.3 Unterjährige und stetige Verzinsung	76
2.3 Raten und Renten	78
2.3.1 Raten	78
2.3.2 Renten	81
2.3.3 Kombinationen aus Raten und Renten	85
2.3.4 Unterjährige Raten und Renten	87
2.4 Tilgungen	89
2.5 Abschreibungen.....	93
3. Aufgaben.....	97

III Funktionen einer Variablen	103
1. Funktionsbegriff und Funktionseigenschaften.....	105
1.1 Definition.....	105
1.2 Darstellungsformen	106
1.3 Verschiedene Funktionstypen.....	109
1.4 Funktionseigenschaften.....	113
2. Elementare Funktionen.....	129
2.1 Elementare Funktionen.....	129
2.1.1 Ganz rationale Funktionen	130
2.1.2 Gebrochen rationale Funktionen.....	138
2.1.3 Algebraische Funktionen	144
2.1.4 Transzendente Funktionen	145
2.1.4.1 Exponentialfunktion	145
2.1.4.2 Logarithmusfunktion	147
2.2 Spezielle Funktionen.....	149
2.2.1 Absolutfunktion.....	149
2.2.2 Minimum- und Maximumfunktion.....	150
2.2.3 Vorzeichenfunktion.....	152
2.3 Ökonomische Funktionen	153
2.3.1 Angebots- und Nachfragefunktionen	153
2.3.2 Umsatzfunktion	155
2.3.3 Kostenfunktion	156
2.3.4 Gewinnfunktion	159
3. Differenzialrechnung	163
3.1 Einführung.....	163
3.2 Der Differenzialquotient	164
3.3 Technik des Differenzierens	167
3.4 Das Differenzial.....	174
3.5 Das Newton-Verfahren.....	176
3.6 Kurvendiskussion allgemeiner Funktionen.....	178
3.7 Diskussion ökonomischer Funktionen.....	184
3.7.1 Kostenfunktion	185
3.7.2 Umsatzfunktion	189
3.7.3 Gewinnfunktion	190
3.7.4 Elastizitäten.....	197
3.7.5 Wachstumsraten	203

3.7.5.1	Stetige Wachstumsraten	203
3.7.5.2	Diskrete Wachstumsraten	205
3.7.5.3	Zusammenhänge	208
3.8	Exkurs: Die Regel von l'Hospital.....	211
4.	Aufgaben.....	215
IV Funktionen mehrerer Variablen		225
1.	Begriff, Darstellung, Eigenschaften	227
1.1	Begriff.....	227
1.2	Darstellungsformen.....	229
1.3	Funktionseigenschaften	236
2.	Differenzialrechnung.....	239
2.1	Allgemeines.....	239
2.2	Partielle Ableitungen erster Ordnung	239
2.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung.....	243
2.4	Partielles und totales Differenzial.....	245
2.5	Ökonomische Anwendungen.....	246
2.6	Extremwertbestimmung.....	249
2.6.1	Extremwerte ohne Nebenbedingungen	250
2.6.2	Einbeziehen von Nebenbedingungen.....	253
3.	Aufgaben.....	259
V Integralrechnung.....		263
1.	Begriff und Integrationstechnik	265
1.1	Allgemeines.....	265
1.2	Unbestimmtes Integral.....	265
1.3	Technik des Integrierens	267
1.4	Bestimmtes Integral	274
1.5	Uneigentliches Integral.....	282
2.	Ökonomische Anwendungen	285
2.1	Kosten-, Umsatz- und Gewinnfunktion	285
2.2	Konsumenten- und Produzentenrente	286
2.3	Investitionen und Kapitalstock.....	288
2.4	Die Standardnormalverteilung.....	289
2.5	Numerische Integrationsverfahren	292
2.6	Exkurs: Elementare Differenzialgleichungen	295
2.6.1	Einführung	295

2.6.2	Lösung von Differenzialgleichungen durch Variablentrennung.....	296
2.6.3	Ökonomische Anwendungen separabler Differenzialgleichungen ...	298
3.	Aufgaben.....	301
VI	Lineare Algebra	303
1.	Vektoren.....	305
1.1	Begriff.....	305
1.2	Ordnungsrelationen und Vektoroperationen	306
1.3	Grafische Darstellung und Vektorraum.....	308
1.4	Vektoreigenschaften.....	310
1.4.1	Linearkombination von Vektoren	310
1.4.2	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit.....	312
1.4.3	Einheitsvektoren.....	315
1.4.4	Interpretation des Skalarprodukts.....	316
2.	Matrizen.....	319
2.1	Begriff.....	319
2.2	Spezielle Matrizen	320
2.3	Ordnungsrelationen und Matrizenoperationen	324
2.4	Rang einer Matrix.....	333
3.	Lineare Gleichungssysteme	335
3.1	Einführung.....	335
3.2	Lösung linearer Gleichungssysteme	337
3.3	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit.....	340
3.4	Der Gauß'sche Lösungsalgorithmus	342
4.	Determinanten	349
4.1	Begriff, Berechnung und Eigenschaften.....	349
4.2	Determinanten und der Rang von Matrizen.....	355
4.3	Determinanten und die Berechnung von Inversen	356
4.4	Determinanten und lineare Gleichungssysteme.....	358
4.5	Exkurs: Matrizenungleichungen.....	359
5.	Lineare Optimierung.....	361
5.1	Grundlagen.....	361
5.2	Das Simplexverfahren	366
6.	Aufgaben.....	373
VII	Lösungen	379
1.	Allgemeine Grundlagen.....	381

2. Finanzmathematik	391
3. Funktionen einer Variablen.....	403
4. Funktionen mehrerer Variablen	431
5. Integralrechnung	441
6. Lineare Algebra.....	449
Literaturverzeichnis.....	463
Stichwortverzeichnis	465

Abbildungsverzeichnis

Abbildung II 1: Zeitstrahl.....	69
Abbildung II 2: Einfache Verzinsung	71
Abbildung II 3: Zinseszins	74
Abbildung II 4: Endkapital bei vorschüssigen Ratenverträgen.....	78
Abbildung II 5: Endkapital bei nachschüssigen Ratenverträgen	80
Abbildung II 6: Barwert nachschüssiger Renten.....	81
Abbildung II 7: Barwert vorschüssiger Renten	84
Abbildung II 8: Kombinationen aus Raten und Renten.....	86
Abbildung II 9: Allgemeiner Tilgungsplan bei annuitätischer Tilgung	91
Abbildung III 1: Abbildungen.....	106
Abbildung III 2: Kartesisches Koordinatensystem	109
Abbildung III 3: Stetige und diskrete Funktionen.....	110
Abbildung III 4: Eindeutige und eineindeutige Funktionen.....	111
Abbildung III 5: Nullstellen	113
Abbildung III 6: Relative Extrema	114
Abbildung III 7: Absolute Extrema	115
Abbildung III 8: Steigung.....	116
Abbildung III 9: Steigende und fallende Funktion	116
Abbildung III 10: Beschränktheit.....	117
Abbildung III 11: Konkave Funktionen	117
Abbildung III 12: Konvexe Funktionen	118
Abbildung III 13: Krümmungsbeispielfunktionen	118
Abbildung III 14: Grenzwerte.....	119
Abbildung III 15: Stetige und unstetige Funktionen.....	126
Abbildung III 16: Elementare mathematische Funktionen	129
Abbildung III 17: Lineare Funktionen	131
Abbildung III 18: Geradensteigung aus zwei Punkten.....	132
Abbildung III 19: Nach oben/unten geöffnete Parabeln	133
Abbildung III 20: Gestauchte und gestreckte Parabeln	133
Abbildung III 21: Nullstellen bei Parabeln.....	135
Abbildung III 22: Polstellen bei gebrochen rationalen Funktionen.....	140

Abbildung III 23: Gerade (links) und ungerade (rechts) Polstellen	141
Abbildung III 24: Wurzelfunktionen	145
Abbildung III 25: Verlauf von Exponentialfunktionen	146
Abbildung III 26: Exponential- und Logarithmusfunktionen.....	148
Abbildung III 27: Verlauf von Logarithmusfunktionen	149
Abbildung III 28: Vorzeichenfunktion	152
Abbildung III 29: Angebots- und Nachfragefunktion.....	154
Abbildung III 30: Umsatzfunktionen bei linearer Preis-Absatz-Funktion	155
Abbildung III 31: Fixkostendegression	156
Abbildung III 32: Lineare Kostenfunktion	157
Abbildung III 33: Progressive Kostenfunktion.....	158
Abbildung III 34: Degressive Kostenfunktion.....	158
Abbildung III 35: Ertragsgesetzliche Kostenfunktion	159
Abbildung III 36: Lineare Gewinnfunktion.....	160
Abbildung III 37: Differenzenquotient.....	164
Abbildung III 38: Herleitung Differenzialquotient.....	165
Abbildung III 39: Nicht differenzierbare, aber stetige Funktionen	166
Abbildung III 40: Herleitung Differenzial	175
Abbildung III 41: Newton-Verfahren	177
Abbildung III 42: Funktionsbeispiel zur Kurvendiskussion	178
Abbildung III 43: Zusammenhang zwischen Steigung und Krümmung.....	181
Abbildung III 44: Extrema und Sattelpunkte	182
Abbildung III 45: Eigenschaften ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen	187
Abbildung III 46: Langfristiges Angebot	192
Abbildung III 47: Kurzfristiges Angebot	193
Abbildung III 48: Cournot-Punkt bei linearem Kostenverlauf	196
Abbildung III 49: Cournot-Punkt bei ertragsgesetzlichem Kostenverlauf.....	196
Abbildung III 50: Preiselastizität der Nachfrage	200
Abbildung III 51: Umsatz und Elastizität	202
Abbildung III 52: Differenz stetiger und diskreter Wachstumsraten.....	209
Abbildung IV 1: Punktkonstruktion im dreidimensionalen Raum	230
Abbildung IV 2: Ebene im dreidimensionalen Raum.....	231
Abbildung IV 3: Grafen nichtlinearer Funktionen.....	232
Abbildung IV 4: ceteris-paribus-Bedingung bei quadratischer Funktion.....	233
Abbildung IV 5: Isolinien bei quadratischer Funktion	234
Abbildung IV 6: Maximum und Minimum quadratischer Funktionen.....	237