Ilka Agricola | Thomas Friedrich

Elementargeometrie

Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht

2. Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Ilka Agricola | Thomas Friedrich

Elementargeometrie

Ilka Agricola | Thomas Friedrich

Elementargeometrie

Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dr. habil. Ilka Agricola
Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6
10099 Berlin

agricola@mathematik.hu-berlin.de
friedric@mathematik.hu-berlin.de

1. Auflage 2005
2., überarbeitete und erweiterte Auflage 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Susanne Jahnel

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0576-8

Vorwort zur zweiten Auflage

Zu unserer Freude hat sich nun, drei Jahre nach dem ersten Erscheinen dieses Buches, eine Gelegenheit zu einer zweiten Auflage ergeben. Wir haben diese genutzt, um eine Reihe kleinerer Korrekturen vorzunehmen, die hier aufzulisten nicht lohnt. Inhaltliche Ergänzungen wurden bei den Ornamentgruppen sowie in der hyperbolischen und der sphärischen Geometrie vorgenommen; wir denken, dass diese Passagen dadurch verständlicher und interessanter geworden sind. Ein neuer Anhang enthält Musterlösungen ausgewählter Übungsaufgaben aus jedem Kapitel.

Wir danken den zahlreichen Lesern der ersten Auflage, die auf Ungenauigkeiten und mögliche Verbesserungen im Text hingewiesen haben – vor allem Günter Ewald (Bochum), Christian Hartfeldt (Magdeburg), Lutz Hille (Bielefeld/Münster), Wolfgang Kühnel (Stuttgart), Christine Scharlach (Berlin) und Dorothee Schüth (Berlin). Natürlich freuen wir uns auch in Zukunft über Hinweise & Anregungen, die wir wie bisher auf der Internetseite des Buches sammeln werden:

http://www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~agricola/elemgeo.html

Zudem danken wir Julia Becker-Bender für ihr gewissenhaftes Korrekturlesen des gesamten Manuskripts.

Berlin, im Juni 2008

Ilka Agricola
Thomas Friedrich

Vorwort zur ersten Auflage

für Julius

Die Geometrie ist ein umfangreicher Bestandteil des Mathematikunterrichts in der Schule. Die Inhalte beziehen sich hauptsächlich auf die Eigenschaften elementargeometrischer Figuren der Ebene (Gerade, Dreieck, Kreis), Transformationen der Ebene und auf Flächen und Körper im Raum. In der Sekundarstufe II kommen die analytische Geometrie, die Trigonometrie, spezielle Kurven und die Kegelschnitte hinzu. Als Erweiterungskurse sind Elemente der nichteuklidischen Geometrie möglich. Insgesamt ist dies ein breites Spektrum geometrischer Themen, das der Mathematiklehrer seinen Schülern vermitteln soll. Während des Studiums für Lehramtskandidaten an der Universität sind es in der Grundausbildung zunächst die Vorlesungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie im ersten Studienjahr sowie die Vorlesung zur Elementargeometrie im zweiten Studienjahr, welche dem angehenden Lehrer in mathematisch systematischer Form die Inhalte der genannten geometrischen Themen nahe bringen sollten. Betrachtet man jedoch den universitären Unterricht über einen längeren Zeitraum, so ist unschwer zu erkennen, dass in der Vorlesung zur linearen Algebra schrittweise die geometrischen Themen immer mehr reduziert worden sind, manchmal nahezu vollständig ausgeblendet werden. Insgesamt ergibt sich damit das Bild, dass die Vorlesung zur Elementargeometrie in der Grundausbildung der Lehramtskandidaten ein wesentlicher Bestandteil ihrer geometrischen Ausbildung mit damit klar festgelegtem Inhalt ist.

Das vorliegende Buch entstand nach einer einsemestrigen Vorlesung für Lehramtskandidaten im zweiten Studienjahr über „Elementargeometrie“ an der Humboldt-Universität zu Berlin. Die Studenten hatten bereits die einjährigen Vorlesungen zur linearen Algebra und Analysis gehört, im ersten Kapitel stellen wir nochmals einige Aspekte dieser Vorlesungen summarisch zusammen. Grundsätzlich setzt unsere Behandlung der Elementargeometrie diese Kenntnisse voraus, obgleich sie in weiten Teilen des Textes kaum benötigt werden. Entsprechend ist dieser Text als Begleitbuch zu einer solchen Vorlesung sowie zu Seminaren geeignet. Weiterhin erhoffen wir uns, dass das Buch als Kompendium des Schulstoffes zur Elementargeometrie von im Beruf stehenden Lehrern genutzt wird. Ausgewählte Teile des Textes sind auch guten Schülern der Klassenstufen 11 bis 13 zugänglich und können im Idealfall als Grundlage für Vorträge, Vertiefungsprojekte oder Facharbeiten genutzt werden.

Das Kapitel 2 ist den elementargeometrischen Figuren und deren Eigenschaften gewidmet. Wir beginnen mit den Strahlensätzen für Geraden und wenden uns danach dem Dreieck zu. Nach den Kongruenz- und Ähnlichkeitssätzen verwenden wir insbesondere die Sätze von Menelaos und Ceva, um die Schnittpunkte der besonderen Linien im Dreieck zu behandeln. Weiterhin besprechen wir die In-, Um- und Ankreise des Dreiecks, dessen Flächeninhalt und seine Beziehung zu den Radien der genannten Kreise. Auf ähnliche Weise behandeln wir den Kreis und diskutieren insbesondere den Feuerbachschen Kreis, die Simsonsche und die Steinersche Gerade. Mit Hinblick auf die in Kapitel 4 darzulegende hyperbolische Geometrie fügen wir bereits an dieser Stelle einen Abschnitt über Inversionen am Kreis ein. Es folgen die Kegelschnitte, die Herleitung ihrer allgemeinen Gleichung, der nummerischen Exzentrizität und des Parameters sowie die Bestimmung der Brennpunkte und Brenngeraden. Einige markante Eigenschaften der Kegelschnitte beweisen wir direkt im Text, einige analoge Eigenschaften findet der Leser in den Übungsaufgaben am Ende von Kapitel 2. Danach wenden wir uns Flächen und Körpern im Raum zu. Wir leiten die Formeln für die Oberfläche einer Rotationsfläche sowie die Formel für das Volumen eines Rotationskörpers ab, beweisen den Euler'schen Polyedersatz (für konvexe Polyeder) und beenden das Kapitel 2 mit der Klassifikation der platonischen Körper.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit den Symmetrien des euklidischen Raumes. Wir besprechen kurz affine Abbildungen, die ihnen entsprechenden linearen Abbildungen und den Schwerpunkt eines endlichen gewichteten Punktsystems. Parallelprojektionen auf Ebenen entlang von Geraden und auf Geraden entlang von Ebenen sind erste Beispiele affiner Abbildungen. Danach behandeln wir ausführlich zentrische Streckungen und Translationen. Zunächst charakterisieren wir sie durch eine gemeinsame geometrische Eigenschaft und folgern, dass sie zusammen eine nichtabelsche Gruppe von Transformationen des Raumes in sich bilden. Danach bestimmen wir in der Ebene ausführlich ihre Kompositionen und besprechen als Anwendung die Streckungszentren zweier Kreise, mit deren Hilfe man die gemeinsame Tangenten an zwei Kreise konstruiert. Es folgt das Studium der Isometrien der Ebene. Zunächst sind Achsenspiegelungen, Translationen und Drehungen Beispiele, und wir studieren erneut deren Kompositionen. Wichtig sind die Fixpunkte: Eine Isometrie der Ebene mit drei nicht kollinearen Fixpunkten ist die Identität. Analog charakterisieren wir alle Isometrien mit genau zwei Fixpunkten, einem Fixpunkt sowie die fixpunktfreien Isometrien. Die von allen Isometrien und allen zentrischen Streckungen erzeugte Gruppe besteht aus den Ähnlichkeitstransformationen der Ebene. Auf ähnliche Weise behandeln wir die Transformationen des dreidimensionalen Raumes. Zunächst studieren wir die Verknüpfung verschiedener solcher Abbildungen und wenden uns dann erneut der Beschreibung der Fixpunktmengen räumlicher Isometrien zu. Diese Fixpunktmengen ergeben eine Klassifikation der Isometrien von $\mathcal{E}^3$. Die letzten beiden Abschnitte dieses Kapitels sind dem

Studium diskreter Isometriegruppen des euklidischen Raumes gewidmet. Im Fall der Ebene behandeln wir die zyklischen Drehgruppen, die Dieder-Gruppe und Gitter. Wir leiten eine notwendige Bedingung an die Punktgruppe einer diskreten Isometriegruppe der Ebene her und erhalten schlussendlich eine Klassifikation aller fraglichen Gruppen. Im Fall des Raumes beschränken wir uns darauf, die endlichen Isometriegruppen zu klassifizieren. Diese sind die Invarianzgruppen der platonischen Körper sowie die Symmetriegruppe einer Pyramide oder eines Zylinders mit regelmäßiger polygonaler Basis. Die Tetraedergruppe, die Würfelgruppe sowie die Dodekaedergruppe werden ausführlich beschrieben.

Das Kapitel 4 beginnen wir mit der Axiomatik der Elementargeometrie und der Bedeutung des Parallelenaxioms. Die hyperbolische Geometrie konstruieren wir in der oberen Halbebene, in ihr sind die Geraden euklidische Kreisbögen oder Halbgeraden. Wir behandeln unterschiedliche Ausdrücke für den hyperbolischen Abstand zweier Punkte. Neben einer direkten Formel kann dieser gleichfalls durch ein Doppelverhältnis dargestellt werden. Insbesondere ist die Dreiecksungleichung richtig, und die hyperbolische Ebene wird ein metrischer Raum. Wir bestimmen dessen Isometriegruppe und beweisen die Formeln für die hyperbolische Länge einer Kurve sowie den hyperbolischen Flächeninhalt eines Gebietes. Mittels der Cayley-Transformation gehen wir zum Scheibenmodell der hyperbolischen Geometrie über. Danach behandeln wir ausgewählte Eigenschaften der geometrischen Figuren in der hyperbolischen Ebene. Wir berechnen den Umfang von Kreisen, deren hyperbolischen Flächeninhalt, leiten den hyperbolischen Satz von Pythagoras sowie andere Formeln der Trigonometrie her. Die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks und dessen Winkeldefekt wird vollständig bewiesen. In den Übungsaufgaben findet der Leser eine Vielzahl weiterer, zur euklidischen Geometrie analoger Resultate der hyperbolischen Elementargeometrie. Diese betreffen Paare von hyperbolischen Geraden, Dreiecke und deren merkwürdige Punkte, In- und Umkreise von Dreiecken sowie die sogenannten Horozyklen. In einem weiteren Abschnitt geben wir die Einteilung der Isometrien in elliptische, parabolische und hyperbolische Transformationen sowohl mittels der Jordanschen Normalform als auch unter Verwendung von Fixpunktmengen an. Ausführlich studieren wir die Frage, welchen Typ der Kommutator zweier Isometrien hat. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels ist Fuchs'schen Gruppen gewidmet. Dabei handelt es sich um diskrete Untergruppen der Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene. Neben einer Reihe von Beispielen derartiger Gruppen führen wir deren Limesmenge ein und beweisen, dass diese Menge entweder $0, 1, 2$ oder unendlich viele Punkte hat. Fuchs'sche Gruppen mit nicht mehr als zwei Limespunkten nennt man elementar. Wir klassifizieren alle elementaren Fuchs'schen Gruppen.

In Anlehnung an die hyperbolische Geometrie behandeln wir im letzten Kapitel die sphärische Geometrie. Wir betrachten die Menge aller Punkte der zweidimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^2$. Die Großkreise spielen die Rolle sphärischer Geraden und realisieren den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten im sphärischen Raum. Wir bestimmen die Isometriegruppe sowie die Gruppe aller konformen Abbildungen vollständig. Anschließend beweisen wir die wichtigsten Formeln der sphärischen Trigonometrie und studieren das jedem sphärischen Dreieck zugeordnete Polardreieck. Daraus ergeben sich die Formeln für den Flächeninhalt sphärischer Zwei- und Dreiecke sowie diverse Ungleichungen zwischen den Seitenlängen und Winkeln.

Am Ende jedes Kapitels findet der Leser eine Auswahl von Übungsaufgaben, die unseren Hörern meist im Rahmen der Hausaufgaben gestellt wurden. Jeder Student, der beim Lösen dieser Aufgaben auf Schwierigkeiten stößt, ist herzlich eingeladen, uns in einer E-Mail sein Problem zu schildern. Wir werden uns bemühen, ihm sodann zu helfen. Für Lehrende an Schulen und Universitäten haben wir ein kleines Heft mit Lösungshinweisen erstellt, welches auf Anfrage ebenfalls bei uns erhältlich ist. Weiterhin besitzt das Buch eine eigene Internetseite,

http://www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~agricola/elemgeo.html

Auf dieser findet man neben einer Liste bekanntwerdender Schreibfehler vor allem pdf-Dateien derjenigen Seiten, auf denen Bilder vorkommen, die im Original mehrfarbig sind, aus Kostengründen hier aber in schwarz-weiss abgedruckt sind. Weiterhin findet sich dort eine Sammlung von www-Links zur Elementargeometrie, die jedoch keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erhebt.

Den Hörern unserer Lehrveranstaltungen danken wir für zahlreiche Hinweise, die zur Ergänzung und Verbesserung des Textes geführt haben. Herr Dr. sc. Hubert Gollek und Herr Dipl.-Phys. Christof Puhle haben das gesamte Manuskript durchgelesen und in vielen Kapiteln auf notwendige Korrekturen hingewiesen. Nicht zuletzt danken wir Frau Schmickler-Hirzebruch vom Vieweg Verlag für die Bereitschaft, einige Seiten dieses Buches im Zweifarbdruck herzustellen. Uns ist bewusst, dass dies ein seltenes (wenn auch sehr wünschenswertes) Privileg ist. Wir hoffen, dass dies in der mathematischen Literatur kein Einzelfall bleiben wird und dass die Leser sich an dieser nicht selbstverständlichen Bereicherung des Textes erfreuen werden.

Berlin, im Dezember 2004

Ilka Agricola
Thomas Friedrich

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung: Der euklidische Raum

Der euklidische Raum $\mathcal{E}^n$ ist ein affiner Raum über einem reellen Vektorraum $V(\mathcal{E}^n)$ mit positiv-definitem Skalarprodukt. Den unterliegenden Vektorraum $V(\mathcal{E}^n)$ können wir nach der Festlegung einer orthonormalen Basis mit dem Koordinatenraum $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Der Vektorraum wirkt mittels der *Translationen* auf dem Punktraum $\mathcal{E}^n$ einfach-transitiv. Für zwei Punkte Q und P des euklidischen Raumes $\mathcal{E}^n$ bezeichnen wir mit $\overrightarrow{QP} := P - Q$ denjenigen Vektor, dessen Translation Q auf P abbildet. Sind in diesem Sinne $P - Q = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, \ldots, z_1 - z_2)$ die Koordinaten des Vektors $P - Q$, so ist der Abstand zwischen den Punkten P und Q vermittels der Formel

$$d(P, Q) \;:=\; |\overrightarrow{PQ}| \;=\; \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \ldots + (z_1 - z_2)^2}$$

definiert. Damit werden die euklidischen Räume zugleich metrische Räume. Eine Abbildung $f : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ nennt man eine *Isometrie*, falls sie den Abstand zwischen zwei Punkten nicht verändert,

$$d\big(f(P), f(Q)\big) \;=\; d\big(P, Q\big).$$

Offenkundig ist jede Isometrie in diesem Sinne eine injektive Abbildung. Jede Isometrie des euklidischen Raumes ist zugleich surjektiv. Die Menge $\mathcal{I}$ aller Isometrien des euklidischen Raumes ist eine Gruppe. Wir bestimmen sie hier mit den Mitteln der linearen Algebra, in Abschnitt 3.4 werden wir sie rein elementargeometrisch beschreiben.

Satz 1. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie. Dann existieren eine orthogonale Matrix A und ein Vektor $B \in \mathbb{R}^n$ derart, dass für alle $P \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$f(P) \;=\; A \cdot P \;+\; B.$$

Beweis. Wir können o. B. d. A. voraussetzen, dass die Isometrie f den Koordinatenursprung $0 \in \mathbb{R}^n$ nicht bewegt. Anderenfalls gehen wir von f zu der neuen Isometrie $f^*(P) := f(P) - f(0)$ über. Das Skalarprodukt des euklidischen Raumes kann mittels des Abstandes zum Koordinatenursprung ausgedrückt werden,

$$\langle P, Q\rangle \;=\; \frac{1}{4}\big(|P + Q|^2 \;-\; |P - Q|^2\big) \;=\; \frac{1}{4}\big(d^2(0, P + Q) \;-\; d^2(0, P - Q)\big).$$

Gilt nun $f(0) = 0$ und erhält die Abbildung f den Abstand zwischen den Punkten, so erhält f auch das Skalarprodukt, $\langle f(P), f(Q)\rangle = \langle P, Q\rangle$. Wir betrachten eine orthonormale Basis $e_1, \ldots, e_n$. Dann bilden die Vektoren $e_1^* := f(e_1), \ldots, e_n^* := f(e_n)$

gleichfalls eine orthonormale Basis. Diese neue Basis kann mittels einer orthogonalen Matrix A als Linearkombination der Ausgangsbasis dargestellt werden,

$$e_i^* \;:=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot e_j .$$

Aus der Zerlegung des Vektors $f(P)$ bezüglich der orthonormalen Basis $e_1^*, \ldots, e_n^*$ folgt jetzt

$$f(P) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle f(P), e_i^* \rangle \cdot e_i^* \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \langle P, e_i \rangle \cdot a_{ij} \cdot e_j .$$

Damit ist f von der behaupteten Gestalt. □

Definition 1. Zwei Teilmengen Σ_1, Σ_2 eines euklidischen Raumes heißen *kongruent*, falls eine Isometrie $f \in \mathcal{I}$ mit $f(\Sigma_1) = \Sigma_2$ existiert. Zwei Teilmengen des euklidischen Raumes heißen *ähnlich*, falls es eine Abbildung $f : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ gibt, welche Σ_1 in Σ_2 überführt und selbst die Superposition von Isometrien und Streckungen ist.

Eine Kurve $\mathcal{C}$ stellen wir uns durch eine ihrer Parametrisierungen $\gamma : [a, b] \to \mathcal{E}^n$ gegeben vor. Wir wählen auf der Kurve endlich viele Punkte $P_0 = \gamma(t_0), P_1 = \gamma(t_1), P_2 = \gamma(t_2), \ldots, P_k = \gamma(t_k)$, welche einer wachsenden Parameterfolge $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ entsprechen. Ersetzen wir die Kurve durch den durch diese Punkte verlaufenden Polygonzug $\mathcal{P}$ und messen wir dessen Länge, so erhalten wir

$$L(\mathcal{P}) \;=\; \sum_{i=1}^{k} |P_i - P_{i-1}| \;=\; \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| \cdot \big(t_i - t_{i-1}\big).$$

Die *Länge $L(\mathcal{C})$ der Kurve* wird als das Supremum der Längen aller dieser die Kurve approximierenden Polygonzüge definiert,

$$L(\mathcal{C}) \;:=\; \sup\big(L(\mathcal{P})\big).$$

Ist die Kurve mindestens einmal differenzierbar, so erhält man unter Verwendung der Mittelwertsätze der Differenzialrechnung die einfache Formel

$$L(\mathcal{C}) \;=\; \int_a^b |\gamma'(t)| \cdot dt.$$

Hierbei ist $\gamma'(t)$ die Ableitung von $\gamma : [a, b] \to V(\mathcal{E}^n)$ nach dem Parameter t, der sogenannte *Geschwindigkeitsvektor*. Ist etwa, nach Festlegung eines Koordinatensystems, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eine Kurve im dreidimensionalen Raum, so berechnet sich deren Länge durch

$$L(\mathcal{C}) \;=\; \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \cdot dt.$$

Flächeninhalts- bzw. Volumenmessungen der Teilmengen des euklidischen Raumes sind schwieriger. Zunächst kann man beweisen, dass kein allgemeiner Volumenbegriff in dem Sinne existiert, dass *jeder* Teilmenge $A \subset \mathcal{E}^n$ eine nicht-negative Zahl

$\mu(A) \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$ oder Unendlich derart zugeordnet werden kann, dass diese "Volumenmessung" invariant unter der Isometriegruppe des euklidischen Raumes wäre und die "vernünftige" Additivitätsbedingung

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots$ erfüllen würde. Andererseits, eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathcal{E}^n$ approximieren wir von innen und von außen durch disjunkte Würfel des euklidischen Raumes

$$\bigcup_{i=1}^{k} W_i \;\subset\; A \;\subset \bigcup_{j=1}^{l} W_j^*$$

und messen das Gesamtvolumen dieser beiden Würfelapproximationen. Das innere bzw. äußere Volumen der Menge A wird nunmehr als das Supremum bzw. Infimum dieser Volumina definiert,

$$\underline{\mathrm{vol}}(A) \;:=\; \sup\Big(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(W_i)\Big), \quad \overline{\mathrm{vol}}(A) \;:=\; \inf\Big(\sum_{j=1}^{l} \mathrm{vol}(W_j^*)\Big).$$

Eine beschränkte Menge $A \subset \mathcal{E}^n$ nennt man *Jordan-messbar*, falls inneres und äußeres Volumen zusammenfallen,

$$\underline{\mathrm{vol}}(A) \;=\; \overline{\mathrm{vol}}(A) \;=:\; \mathrm{vol}(A).$$

Alle in der elementaren euklidischen Geometrie auftretenden Teilmengen der Ebene und des Raumes haben in diesem Sinne einen Flächeninhalt bzw. ein Volumen. Dieses kann mittels der Integralrechnung berechnet werden, wir werden die dafür bekannten Formeln der Analysis später benutzen. Ist zum Beispiel $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine positive Funktion und betrachten wir in der Ebene die Teilmenge

$$A \;:=\; \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \,\leq\, x \,\leq\, b, \quad \text{und} \quad 0 \,\leq\, y \,\leq\, f(x)\big\}\;,$$

so wird der Flächeninhalt der Menge berechnet durch die Formel

$$\mathrm{vol}(A) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx.$$

Diese Formel ist ein Spezialfall des besonders wichtigen *Cavalieri'schen Prinzips.* Es besagt, dass zwei Körper im $\mathcal{E}^n$ dasselbe n-dimensionale Volumen haben, wenn eine Hyperebene derart existiert, dass jede dazu parallele Ebene aus den beiden Körpern Stücke mit gleichem $(n-1)$-dimensionalen Volumen ausschneidet. Wir werden dieses Prinzip bei der Volumenberechnung von Körpern im dreidimensionalen Raum verwenden.

Eine Besonderheit der euklidischen Ebene besteht darin, dass sie mit dem Körper $\mathbb{C}$ aller *komplexen Zahlen* identifiziert werden kann. Dem Paar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ reeller Zahlen ordnet man die komplexe Zahl $z := x + iy$ zu. Damit sind Mengen in der euklidischen Ebene unter Verwendung komplexer Zahlen beschreibbar. Im