

Katja Biermann
Martin Grötschel
Brigitte Lutz-Westphal
Hrsg.

Besser als Mathe

Moderne angewandte Mathematik
aus dem MATHEON zum Mitmachen

2. Auflage

DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

SACHBUCH

 Springer Spektrum

Besser als Mathe

Katja Biermann · Martin Grötschel ·
Brigitte Lutz-Westphal
Herausgeber

Besser als Mathe

Moderne angewandte Mathematik
aus dem MATHEON zum Mitmachen

Mit Illustrationen von Sonja Rörig

2., aktualisierte Auflage



Springer Spektrum

Herausgeber

Katja Biermann
Technische Universität Berlin
Deutschland
biermann@math.tu-berlin.de

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik
Berlin, Deutschland
groetschel@zib.de

Prof. Dr. Brigitte Lutz-Westphal
Freie Universität Berlin
Deutschland
brigitte.lutz-westphal@math.fu-berlin.de

ISBN 978-3-658-01003-4
DOI 10.1007/978-3-658-01004-1

ISBN 978-3-658-01004-1 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum
© Springer Fachmedien Wiesbaden 2010, 2013

Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser, Mathematik ist überall, sie ist jedoch meistens unsichtbar. Dieses Buch will die Augen öffnen für „den mathematischen Blick auf die Welt“. Ausgehend von praktischen Fragestellungen nehmen wir Sie mit auf eine Entdeckungsreise zu mathematischen Herausforderungen. Diese sind als Aufgaben formuliert, die für jeden verständlich sind.

Die Aufgaben stammen aus den sehr erfolgreichen mathematischen Adventskalendern (www.mathekalender.de), die das DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“ in Berlin seit 2004 jährlich für die Klassenstufen 9–13 und viele andere Mathematikinteressierte veranstaltet. Hierbei wird im Dezember täglich eine Aufgabe freigeschaltet, die einen Aspekt der aktuellen Forschung des MATHEON zugänglich macht. Dieser Wettbewerb hatte in den letzten Jahren jeweils fast 10 000 Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die mit großem Vergnügen jeden Abend neue Aufgaben lösten. Der erstaunliche Erfolg des Mathekalenders bei Jung und Alt war der Anlass, die besten Aufgaben neu zu formulieren, mit ausführlichen Erklärungen zu dem jeweiligen Praxisbezug zu versehen und in diesem Buch zu veröffentlichen.

Besser als Mathe. „Besser als Mathe“ war die Fragebogenantwort eines Schülers der 8. Klasse nach einer Unterrichtseinheit zur Optimierung von Telefonnetzen.¹ Diese positive Überraschung über eine Art von Mathematik, die etwas mit der Lebenswelt und dem Alltagsgeschehen zu tun hat, wollen wir mit diesem Buch weitertragen.

1. Unterrichtsversuch im Wildermuth-Gymnasium Tübingen, 2002, im Rahmen des von der Volkswagenstiftung geförderten MATHEON-Projekts „Diskrete Mathematik für die Schule“ (Leitung und Durchführung: Martin Grötschel und Brigitte Lutz-Westphal)

Wir möchten es ermöglichen, in Unterricht, Studium oder Freizeit häufiger einen Blick auf aktuelle Forschungsfragen und Anwendungen der Mathematik zu werfen und dazu anregen, dies auch zu tun.

Das Besondere an dieser Aufgabensammlung ist, dass alle Aufgaben direkt aus der forschenden Tätigkeit der Autorinnen und Autoren entstanden sind. Sie spiegeln somit unmittelbar wieder, womit sich mathematische Forschung derzeit beschäftigt. Sie zeigen einen authentischen Ausschnitt aus der aktuellen angewandten Mathematik. Diese Aufgaben machen auch deutlich, dass in der Mathematik keinesfalls bereits alles erforscht ist. Mathematik ist ein sehr lebendiges Forschungsfeld. Daran können Sie in diesem Buch teilhaben!

Für wen ist das Buch? Dieses Buch soll neugierig machen auf angewandte Mathematik. Es soll zeigen, wo sich Mathematik in unserem Leben verbirgt, und es soll diese Mathematik erfahrbar machen. Daher richtet sich das Buch an eine breite Leserschaft, angefangen von Jugendlichen ab der 9. Klasse über interessierte Erwachsene bis hin zu Lehrenden an Sekundarstufen, Hochschulen und Universitäten.

Dieses Buch nutzen. Man kann das Buch auf zweierlei Weise nutzen: Als Herausforderung zum selbstständigen Lösen der Aufgaben oder als Lesebuch zur angewandten Mathematik, je nachdem, ob man sich selbst auf die Suche nach eigenen Lösungsansätzen macht, oder ob man die Lösungen als Lehrstücke und Anregungen für die Anwendung von Mathematik liest. Wie in den Adventskalendern üblich, gibt es für jede Aufgabe verschiedene Antwortmöglichkeiten zur Auswahl. Dort verbergen sich häufig schon Hinweise auf einen Lösungsansatz. Alle Aufgaben sind als Problemlösungsaufgaben konzipiert, deren Bearbeitung vielfältige mathematische Kompetenzen fördert und gleichzeitig Anwendungskennntnisse vermittelt.

Das Buch ist in sieben Kapitel gegliedert, die sich jeweils mit einem Thema aus der Lebenswelt beschäftigen. Das letzte Kapitel ist ein „Bonuskapitel“ mit Aufgaben, die einen sehr kurzen Auf-

gabentext haben. Wir haben die Aufgaben bezüglich ihres Anwendungskontextes gruppiert. In jedem Kapitel erschließen sich dadurch vielfältige mathematische Sichtweisen und Methoden. Unterschiedlichste mathematische Fachgebiete kommen bei den Lösungen zum Tragen. Damit eignet sich diese Aufgabensammlung auch für projektartigen Unterricht in den Sekundarstufen. Beispielsweise kann das Kapitel „Mathematik im menschlichen Körper“ für ein fächerübergreifendes Projekt mit dem Biologieunterricht genutzt werden.

Dank. Die Entstehung dieses Buches ist das Ergebnis einer Zusammenarbeit vieler. Erhard Zorn hatte die Idee zum mathematischen Adventskalender. Zusammen mit Sabina Jeschke und Christine von Renesse hat er die Urform dieses Wettbewerbs für Ingenieurstudenten der TU Berlin entwickelt. Aus dieser ist dann der jetzige Adventskalender hervorgegangen. Ihnen gebührt ein besonderer Dank.

Wir danken all jenen, die an den Adventskalendern und an diesem Buch mitgewirkt haben. Es sind dies so viele Personen aus den Trägerinstitutionen des DFG-Forschungszentrums MATHEON (Freie Universität Berlin, Humboldt-Universität zu Berlin, Technische Universität Berlin, Weierstraß-Institut Berlin und Zuse-Institut Berlin), dass wir sie hier nicht alle nennen können. Wir möchten jedoch den Einsatz der an das MATHEON abgeordneten Lehrerinnen und Lehrer besonders erwähnen, die Jahr für Jahr die redaktionelle Arbeit des Adventskalenderteams unterstützen.

Berlin, im Oktober 2009

Katja Biermann
Martin Grötschel
Brigitte Lutz-Westphal

Vorwort zur 2. Auflage

Bücher mit Aufgaben zur Mathematik sind nichts Neues. Das wohl nachhaltigste Buch dieser Art schrieb Alcuin von York im Jahre 795 n. Chr. am Hofe Karls des Großen. Alcuin war von Karl beauftragt worden, das Bildungssystem im Frankenreich zu verbessern und erstellte dafür u. a. eine Sammlung mathematischer Aufgaben. Die von Alcuin gestellte Frage, wie ein Fährmann einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf unbeschadet über einen Fluss bringen kann, kennt jeder – und zwar überall in der Welt.

Wir wollen die vorliegende Sammlung neuer mathematischer Aufgaben aus der anwendungsbezogenen Forschung am DFG-Forschungszentrum MATHEON weder in ihrer Bedeutung noch bezüglich ihrer Wirkung mit Alcuins *Propositiones ad acuendos iuvenes* vergleichen, wir freuen uns jedoch darüber, dass das Buch bei seiner Leserschaft gute Aufnahme gefunden und der Verlag eine zweite Auflage gewünscht hat.

Sehr erfreulich finden wir, dass unsere Aufgabensammlung in Schulen auf verschiedenste Weise eingesetzt wird. Wir haben dies durch Kontakte von Schülern und Lehrern mit den Autoren und Herausgebern erfahren. Lehrkräfte nutzen Aufgaben im Unterricht, und besonders beliebt scheint die Verteilung einzelner Aufgaben an Schülerinnen und Schüler zu sein, die dann einen Vortrag über die Anwendungsfrage, deren mathematische Modellierung und die Lösung halten. Ein Schüler hat sogar einen Fehler in einer Beweisführung gefunden. Auch uns ist dadurch erneut bewusst geworden, dass selbst bei sorgfältigster Kontrolle bei der Buchherstellung Fehler passieren können. Zum Glück gibt es kluge Schüler, die sich nicht vom „geschriebenen Wort“ beeindrucken lassen und selbständig nachdenken (und zu unserem Glück war die angegebene Lösung trotz des Fehlers korrekt).

Es ist mindestens genauso erfreulich, dass der mathematische Adventskalender sich immer größerer Beliebtheit erfreut. Nachdem

im Jahre 2008 auch Aufgaben für Schülerinnen und Schüler der unteren Klassenstufen in den Wettbewerb aufgenommen wurden, hat sich die Teilnehmerzahl auf über 120 000 erhöht. Erwachsene machen ebenfalls gerne mit. Dies zeigt deutlich, dass diese Art des Aufgabenwettbewerbs von der Zielgruppe angenommen wird und dass es wohl doch nicht so schlecht um die Lern- und Leistungsbereitschaft unserer Schülerschaft bestellt ist, wie das manchmal in Presseberichten suggeriert wird.

Berlin, im April 2012,

Katja Biermann
Martin Grötschel
Brigitte Lutz-Westphal

Inhalt

Vorwort v

Vorwort zur 2. Auflage viii

Mathematik ganz freizeitlich

Musik einpacken 3
Andreas Loos

Zum Glück gibt es Garantie! 9
Volker Mehrmann

Molekülbillard 17
Martin Weiser

Stein-Schere-Papier 23
Boris Springborn

Mathematik in Bewegung

Katz und Maus 29
Peter Deußhard und Anton Schiela

Zugfahrt nach Berlin 41
Christian Liebchen

Zuschauer beim Berlin-Marathon 53
Stefan Hougardy, Stefan Kirchner und Mariano Zelke

Die gelben Engel von Nohtam 59
Jörg Rambau

Mathematik komplett technologisch

Wie viel Kapazität hat ein Mobilfunknetz? 77
Andreas Eisenblätter und Hans-Florian Geerdes

Wie Rechner rechnen 87
René Lamour und Caren Tischendorf

Wann geht der Laser an? 93
Mark Lichtner und Lutz Recke

Mathematik ganz zufällig

Der Forsch-Frosch Fred 101
Volker Kaibel

Keller oder Dach zuerst? 111
Nicole Megow

Viele Tests – viele Fehler? 117
Karsten Tabelow

Karamell und Schokolade optimal 121
Andreas Eichhorn

Mathematik in Produktion und Logistik

Roboter und Zuckerstangen 131
Heike Siebert

Die Welt des Herrn Kuhn 141
Daniela Kern

Arvin, Berit und die Lastwagen 151
Falk Ebert und Anita Liebenau

*Lagenwechsel minimieren –
oder das Bohren von Löchern in Leiterplatten* 161
Martin Grötschel, Thorsten Koch und Nam Dũng Hoàng

Mathematik gegen Bankrott

Die Paketversicherung von MathPost 175
Peggy Daume

Ein Kredit für Weihnachtsbaumkugeln 183
Sina Dahms

Optionsbewertung 187
John Schoenmakers

Mathematik im menschlichen Körper

Das morgendliche Brückenritual 195
Oliver Sander

Die Schokoladen-Diät 205
Matthias Ehrhardt

Von Bakterien und Antibiotika 213
Alexander Bockmayr und Abdelhalim Larhlimi

Das DNA-Puzzle 219
Stefan Kirchner

Die kalte Zunge 227
Sören Bartels und Rüdiger Müller

Mathematik auf die Schnelle

Knoten 239

John M. Sullivan

Dachkunst 243

Ulrich Reitebuch und Christian Schulz

10^{2009} ? 249

Serhiy Yanchuk und Leonhard Lücken

Stichwortverzeichnis 253

Die Autorinnen und Autoren 257

Mathematik ganz freizeitlich



Musik einpacken

Andreas Loos

Wer schon einmal Nudeln selbst gemacht hat, der weiß: Frische Pasta kann ganz schön pappen. Das ist ein Problem für die Nudelindustrie, denn es ist nicht leicht, mit unregelmäßigen und klebrigen Nudel-Klumpen 500-Gramm-Beutel genau zu füllen. Einige Hersteller verwenden daher „Teilmengenwaagen“. Die besitzen bis zu hundert kleine Waagschalen, die über ein Förderband mit jeweils ungefähr 50 Gramm Nudel-Klumpen befüllt werden. Dann kommt Mathematik ins Spiel: Ein Computer wählt die zehn Waagschalen aus, deren Inhalt zusammen die 500 Gramm genau erreicht, und leert sie in einen Beutel aus.

Mathematiker nennen das Problem, das der Computer dabei am laufenden Band löst, ein *Subset-Sum-Problem* („Summe aus Teilmengen“). Die Aufgabe besteht im Kern darin, in einer gegebenen Menge von Zahlen diejenigen Zahlen herauszusuchen, die aufsummiert genau eine gegebene Zahl ergeben.

Mal ein Beispiel: Nehmen wir an, die gegebene Menge M enthält alle Primzahlen zwischen 1 und 100, also

$$M := \{1 < i < 100 \mid i \text{ ist prim.}\}$$

Welche Untermenge bildet genau die Summe 100? Es gibt mehrere Lösungen; eine Möglichkeit wäre zum Beispiel $97 + 3 = 100$. Doch wir können auch Wünsche äußern – zum Beispiel kann es manchmal praktisch sein, dass so viele Summanden wie möglich in der Summe vorkommen. Die (beweisbar) beste Lösung ist dann: $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 100$.

Mathematiker sortieren die Subset-Sum-Probleme in eine allgemeinere Klasse von Problemen ein, die sie Knapsack-Probleme getauft haben. Das Wort kommt aus dem Mittelalter; Knappen waren damals sozusagen Ritter in Ausbildung. Wenn sie etwas transpor-