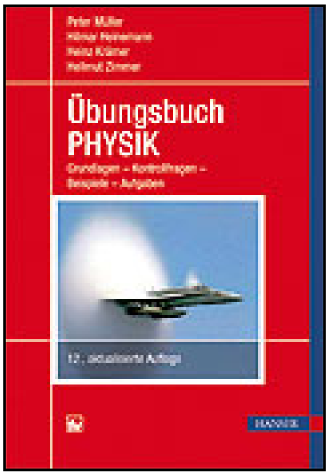
HANSER



Leseprobe

Peter Müller, Hilmar Heinemann, Heinz Krämer, Hellmut Zimmer

Übungsbuch Physik

Grundlagen - Kontrollfragen - Beispiele - Aufgaben

ISBN (Buch): 978-3-446-43532-2

W Schwingungen und Wellen

W 1 Harmonische Schwingungen

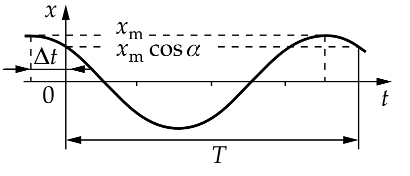
GRUNDLAGEN

1 Ort-Zeit-Funktion

Eine Bewegung mit der Ort-Zeit-Funktion

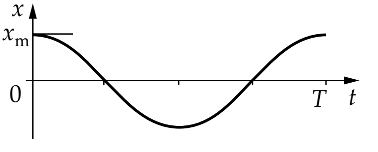
$$\boxed{x(t) = x_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \alpha)}$$

heißt **harmonische Schwingung**. x_m ist die maximale Auslenkung (Amplitude). Es gilt $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi/T$ mit Kreisfrequenz ω_0, Frequenz f und Periodendauer T. $\omega_0 t = \varphi(t)$ ist ein zeitabhängiger Winkel im Argument der trigonometrischen Funktion, α ein konstanter Winkel, der Nullphasenwinkel. Dieser berücksichtigt die zeitliche Verschiebung Δt des Maximums der Kosinusfunktion gegenüber dem Zeitnullpunkt.



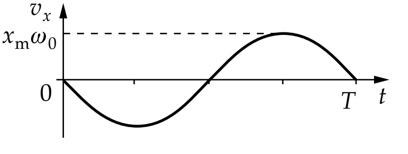
Die Konstanten x_m und α werden aus den Anfangsbedingungen gewonnen. Falls $\alpha = -\pi/2$ ist, kann die Kosinusfunktion durch eine Sinusfunktion ersetzt werden.

Aus der Ort-Zeit-Funktion (skizziert für $\alpha = 0$)



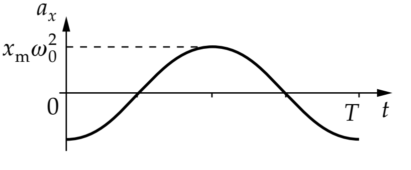
erhält man durch zeitliche Ableitung die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion

$$v_x = -x_\mathrm{m}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$$



und weiter die Beschleunigung-Zeit-Funktion

$$a_x = -x_\mathrm{m}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$



Vergleicht man die Funktionen für x und a_x, so findet man

$$a_x = -\omega_0^2 x$$

Drückt man a_x als zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit aus, so entsteht die **Differenzialgleichung der harmonischen Schwingung**:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

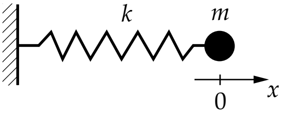
Die Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung ist die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

2 Bewegungsgleichung für harmonische Schwingungen

Jede zeitlich veränderliche physikalische Größe, für die eine Differenzialgleichung gilt, deren äußere Form mit der Differenzialgleichung der harmonischen Schwingung übereinstimmt, führt eine harmonische Schwingung aus. An der Stelle des Ortes x können auch andere physikalische Größen stehen: der Winkel φ bei Drehschwingungen, der Strom I oder die Spannung U bei elektromagnetischen Schwingungen usw. ω_0^2 wird dann durch andere Konstanten zum Ausdruck gebracht. Bei mechanischen Schwingungen entsteht die Differenzialgleichung aus der Bewegungsgleichung. Dabei muss wegen $F_x = +ma_x = -m\omega_0^2 x$, also $F_x \sim -x$, die Kraft F_x eine abstandsproportionale, rücktreibende Kraft sein.

Durch Aufstellen der vollständigen Bewegungsgleichung findet man bei jedem konkreten Bewegungsproblem heraus, wie ω_0 mit den gegebenen Konstanten zusammenhängt.

3 Federschwingung



Bewegt sich eine Punktmasse unter dem Einfluss einer Federkraft $F_x = -kx$, so lautet die Bewegungsgleichung

$$ma_x = -kx$$

Als Differenzialgleichung geschrieben, erhält sie die Form

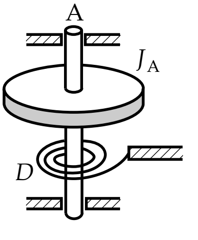
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Damit steht k/m anstelle von ω_0^2:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{bzw.} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Die Periodendauer ist somit $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

4 Drehschwingung



Bei der Drehschwingung tritt an die Stelle der veränderlichen Ortskoordinate ein veränderlicher Winkel φ. Besteht beispielsweise das schwingungsfähige System aus einem Drehkörper (Trägheitsmoment J_A) mit der festen Achse A, der mit einer Spiralfeder (Richtmoment D) verbunden ist, so nimmt die Bewegungsgleichung der Rotation

$$J_\mathrm{A}\ddot{\varphi} = M_\mathrm{A}$$

die Gestalt

$$J_A\ddot{\varphi} = -D\varphi \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\varphi} + \frac{D}{J_A}\varphi = 0$$

an. Es ist also $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J_A}}$ bzw. $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{D}}$.

Die Lösung der Differenzialgleichung ist die Winkel-Zeit-Funktion

$$\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

KONTROLLFRAGEN

W 1-1
Ein Maximum der Elongation einer harmonischen Schwingung $x = x_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$ liege um Δt vor dem Zeitnullpunkt. Berechnen Sie den Nullphasenwinkel α!

W 1-2
Zeigen Sie, dass die beiden Ort-Zeit--Funktionen

$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$ und

$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$

Lösungen der Differenzialgleichung
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ sind!

W 1-3
Was gehört zu einem schwingungsfähigen mechanischen System?

W 1-4
Weshalb treten in der Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung zwei Integrationskonstanten auf? Welche physikalische Bedeutung haben diese Konstanten?

W 1-5
Welchen Wert hat der Nullphasenwinkel α, wenn die Beziehung $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \alpha) = x_m \sin \omega_0 t$ gilt?

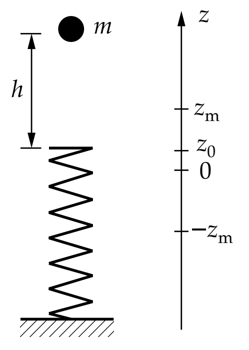
W 1-6
Stellen Sie für den Federschwinger in einem Diagramm die potenzielle Energie über der Zeit dar!

W 1-7
Wie lauten die Differenzialgleichung der harmonischen Schwingung und die Strom-Zeit-Funktion in einem elektrischen Schwingkreis?

BEISPIELE

1. Federschwingung

Ein Körper (Masse m) durchfällt die Höhe h und trifft zur Zeit $t = 0$ am Ort z_0 auf eine senkrecht stehende Schraubenfeder (Federkonstante k). Nach dem Auftreffen bleibt der Körper mit der Feder verbunden, sodass eine harmonische Schwingung entsteht. Der Koordinatenursprung $z = 0$ soll in die Ruhelage der Schwingung gelegt werden. Die Masse der Feder bleibt unberücksichtigt.



a) Bestimmen Sie den Anfangsort z_0 und die Anfangsgeschwindigkeit v_{z0} der harmonischen Schwingung!
b) Bestimmen Sie für diese Schwingung die in der Ort-Zeit-Funktion $z(t)$ enthaltenen unbekannten Größen!
c) Welche maximale Geschwindigkeit v_{zm} tritt bei dieser Schwingung auf?

$m = 50{,}0$ g $\quad k = 20{,}0\,\text{N/mm} \quad h = 200$ mm

Lösung

a) Befindet sich das obere Ende der Feder bei z_0, so ist die Feder entspannt. Deshalb gilt für die Federkraft

$$F_z = -k(z - z_0)$$

Die Ruhelage $z = 0$ ist dort, wo Gewichtskraft F_G und Federkraft F_z im Gleichgewicht sind:

$$F_z(0) - mg = 0$$

Mit

$$F_z(0) = kz_0$$

folgt

$$kz_0 = mg$$

$$\underline{z_0 = \frac{mg}{k}} = \underline{\underline{2{,}45\,\mathrm{cm}}}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit v_{z0} dieser Schwingung liefert der Energiesatz, angewendet auf den freien Fall:

$$mgh = \frac{m}{2} v_{z0}^2$$

$$\underline{v_{z0} = -\sqrt{2gh}} = \underline{\underline{-1{,}98\,\mathrm{m/s}}} \quad \text{(Vorzeichen mit Rücksicht auf die positive } z\text{-Richtung).}$$

b) Die Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung lautet

$$z(t) = z_\mathrm{m} \cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{1}$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ die Kreisfrequenz der Federschwingung ist. Die beiden Unbekannten, die Amplitude z_m und der Nullphasenwinkel α, müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Die notwendige zweite Gleichung wird aus (1) durch Differenzieren nach der Zeit gewonnen:

$$v_z(t) = -z_\mathrm{m} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \tag{2}$$

Zur Zeit $t = 0$ wird (1)

$$z_0 = \frac{mg}{k} = z_\mathrm{m} \cos \alpha \tag{3}$$

und (2)

$$v_{z0} = -\sqrt{2gh} = -z_\mathrm{m} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \alpha \tag{4}$$

Zunächst soll z_m ermittelt werden. Dazu ist α zu eliminieren. Das gelingt mit der Beziehung

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1:$$

$$\left(\frac{mg}{kz_\mathrm{m}}\right)^2 + \frac{2ghm}{kz_\mathrm{m}^2} = 1$$

$$\underline{z_\mathrm{m} = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}}} = \underline{\underline{10{,}2\,\mathrm{cm}}}$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch mit dem Energiesatz:

$$mg(h + z_0) = -mgz_\mathrm{m} + \frac{k}{2}(z_0 + z_\mathrm{m})^2$$

Zur Bestimmung von α muss z_m eliminiert werden. Das gelingt am einfachsten, wenn man (4) durch (3) dividiert:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{k\sqrt{2gh}}{mg\sqrt{k/m}} = \sqrt{\frac{2hk}{mg}}$$

$$\underline{\alpha = \arctan\sqrt{\frac{2kh}{mg}}} = \underline{\underline{76{,}1^\circ}}$$

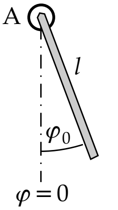
c) Die Geschwindigkeitsamplitude oder maximale Geschwindigkeit ist der Funktion (2) zu entnehmen:

$$v_z = -\underbrace{z_\mathrm{m}\omega_0}_{v_{z\mathrm{m}}} \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

$$v_{z\mathrm{m}} = z_\mathrm{m}\omega_0 = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\underline{v_{z\mathrm{m}} = g\sqrt{\frac{m}{k} + \frac{2h}{g}}} = \underline{\underline{2{,}04\,\mathrm{m/s}}}$$

2. Physikalisches Pendel

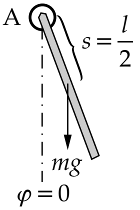


Eine dünne Stange der Länge l und der Masse m kann sich um die durch ihren oberen Endpunkt A gehende horizontale Achse drehen. Sie wird um den Winkel φ_0 aus der Vertikalen ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ losgelassen.

Wie lautet die Funktion $\varphi = \varphi(t)$ für die Bewegung der Stange? Wie groß ist die Periodendauer T?

$l = 60$ cm $\quad \varphi_0 = 0{,}01$ rad

Lösung



Auf die Stange wirkt infolge der Gewichtskraft das Drehmoment

$$M_\mathrm{A} = -mgs\sin\varphi \qquad \text{mit } s = \frac{l}{2}$$

Dieses verursacht entsprechend der Bewegungsgleichung

$$M_\mathrm{A} = J_\mathrm{A}\ddot{\varphi}$$

die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ zur Ruhelage der Stange hin.

Es gilt nun, die Bewegungsgleichung so umzuformen, dass einerseits die gegebenen Größen in ihr enthalten sind und andererseits die Form der Differenzialgleichung der harmonischen Schwingung $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$ erkennbar ist, aus der sich die Form der gesuchten Lösungsfunktion $\varphi = \varphi(t)$ ergibt.

Mithilfe des Satzes von Steiner kann J_A durch den Ausdruck $(J_\mathrm{S} + ms^2)$ ersetzt werden. Hierin ist $J_\mathrm{S} = ml^2/12$ und $s = l/2$. Daher folgt

$$J_\mathrm{A} = \frac{ml^2}{3}$$

Die Bewegungsgleichung lautet demnach konkret für das vorliegende Problem

$$-mg\frac{l}{2}\sin\varphi = \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}$$

Unter Beachtung der auftretenden Auslenkungen $\varphi(t) \leqq \varphi_0 \ll 1$ gilt $\sin\varphi \approx \varphi$ und damit für die Bewegungsgleichung

$$-mg\frac{l}{2}\varphi = \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} \qquad \text{oder} \qquad \ddot{\varphi} + \frac{3g}{2l}\varphi = 0$$

Sie hat somit die Form $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$. Wir können daher die Lösungsfunktion angeben. Es ist

$$\varphi(t) = \varphi_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad \text{mit} \qquad \omega_0^2 = \frac{3g}{2l}$$

Die Konstanten φ_m und α in der Lösungsfunktion ergeben sich aus der Bedingung der Aufgabenstellung $\varphi(t_0) = \varphi_0$ mit $t_0 = 0$. Es ist

$$\varphi_0 = \varphi_\mathrm{m} \cos \alpha$$

Da φ_0 die maximale Auslenkung ist, muss auch der Kosinus maximal, d. h. sein Argument gleich null sein. Daraus ergibt sich $\alpha = 0$. Die Funktion $\varphi(t)$ lautet daher endgültig

$$\underline{\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_0 t}$$

wobei

$$\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}}$$

ist. Für die Periodendauer gilt

$$\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}} = \underline{\underline{1{,}27\,\mathrm{s}}}$$

AUFGABEN

W 1.1

Der Raddurchmesser einer Dampflokomotive ist d_0. Es wird angenommen, dass der Kolben der Dampfmaschine, durch den die Räder angetrieben werden, eine harmonische Schwingung ausführt. Der maximale Kolbenhub ist h.

Wie groß sind bei einer Geschwindigkeit v_0 der Lokomotive

a) die maximale Kolbengeschwindigkeit v_m und

b) die maximale Kolbenbeschleunigung a_m?

$d_0 = 230$ cm $h = 64{,}0$ cm $v_0 = 120\,\mathrm{km/h}$

W 1.2

Bei der Schwingung $x = x_\mathrm{m} \cos(\omega_0 t + \alpha)$ sind zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Elongation x_0 und die Geschwindigkeit v_{x0} gemessen worden. Welche Werte haben der Nullphasenwinkel α und die Amplitude x_m?

$\omega_0 = 90\,\mathrm{s}^{-1}$ $x_0 = 2{,}00$ cm $v_{x0} = 3{,}00\,\mathrm{m/s}$

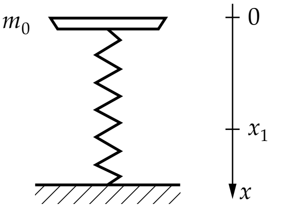
W 1.3

Ein Schüttelsieb führt in senkrechter Richtung harmonische Schwingungen mit der Amplitude x_m aus. Wie groß muss die Frequenz f mindestens sein, damit Steine, die auf dem Sieb liegen, sich von diesem lösen?

$x_\mathrm{m} = 50$ mm

W 1.4

Eine Tellerfederwaage hat bei der maximalen Belastung mit der Masse m_1 die Auslenkung x_1. Die Waagschale hat die Masse m_0. Es wird ein Körper der Masse $m_2 < m_1$ auf die leere Schale gelegt.



a) Bis zu welcher Stelle x_2 wird die Waage ausgelenkt?

b) Bis zu welcher Auslenkung x_3 muss man die Waage niederdrücken, wenn sich nach dem Loslassen der Körper während der anschließenden Bewegung gerade noch nicht von der Waagschale ablösen soll?

$m_0 = 200$ g $m_1 = 10$ kg $m_2 = 900$ g
$x_1 = 50$ mm

W 1.5

Eine Last der Masse m hängt an der Laufkatze eines Kranes und wird mit der Geschwindigkeit v_0 horizontal bewegt. Der Schwerpunktabstand der Last vom Aufhängepunkt